Etude d'une fonction intégrale

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $t + \arctan t = 0$.

2. On pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t + \arctan t}$.

   2.a Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2.b Etudier la parité de f .

2.c Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exprimer $f'(x)$ pour $x > 0$.

2.d Donner le sens de variation de f .

3. On étudie le comportement de f au voisinage de $+\infty$.

3.a Déterminer une constante C telle que pour tout $x > 0$, $\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| \leq C . \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$.

3.b En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$ et préciser sa valeur.

4. On étudie le comportement de f au voisinage de 0^+ .

4.a Montrer qu'il existe deux réels a, b tels que $\frac{1}{t + \arctan t} = \frac{a}{t} + bt + o(t)$ au voisinage de 0^+ .

4.b Soit g une fonction de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{t \to 0+} g(t) = 0$.

Montrer que : $\lim_{x \to 0+} \sup_{t \in [x,2x]} |g(t)| = 0$.

4.c En déduire que si h est une fonction continue de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $h(x) = o(x)$ au voisinage de 0^+ alors $\int_x^{2x} h(t)dt = o(x^2)$ au voisinage de 0^+ .

4.d Montrer que f admet au voisinage de 0 un développement à l'ordre 2 que l'on exprimera.

4.e Montrer qu'on peut prolonger f par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable.
Exprimer alors les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

4.f Etudier, au voisinage de 0, la position relative de f et de sa tangente en 0.

4.g Déterminer un équivalent simple de $f'(x)$ en 0.

4.h En déduire que f est deux fois dérivable en 0, et calculer $f''(0)$.